FUNGSI KARAKTERISTIK DAN REPRESENTASI KANONIK

SEBARAN HIPERGEOMETRIK

DOSEN PENGAMPU: Dr. DODI DEVIANTO



OLEH:

RAHMAWITA

2220432005

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA DAN SAINS DATA

UNIVERSITAS ANDALAS

2022

1. **PENDAHULUAN**

Tes hipergeometrik menggunakan distribusi hipergeometrik untuk mengukur signifikansi statistik dari pengambilan sampel yang terdiri dari sejumlah keberhasilan k k (dari n n total pengambilan) dari populasi berukuran N N yang mengandung keberhasilan K K. Dalam tes untuk representasi keberhasilan yang berlebihan dalam sampel, nilai-p hipergeometrik dihitung sebagai probabilitas penarikan acak k k atau lebih banyak keberhasilan dari populasi dalam penarikan total n n. Dalam tes untuk representasi yang kurang, nilai-p adalah probabilitas menggambar secara acak k k atau lebih sedikit keberhasilan.Sebaran hipergeometrik ditemukan oleh seorang ahli biologi dan ahli statistik Ronald Fisher. Uji berdasarkan distribusi hipergeometrik (uji hipergeometrik) identik dengan uji eksak Fisher versi satu arah. Secara timbal balik, nilai p dari uji eksak Fisher dua sisi dapat dihitung sebagai jumlah dari dua uji hipergeometrik yang sesuai.

Tes ini sering digunakan untuk mengidentifikasi sub-populasi mana yang terlalu banyak atau kurang terwakili dalam sampel. Tes ini memiliki berbagai aplikasi. Misalnya, grup pemasaran dapat menggunakan pengujian untuk memahami basis pelanggan mereka dengan menguji sekumpulan pelanggan yang diketahui untuk representasi berlebihan dari berbagai subkelompok.

Distribusi hipergeometrik adalah distribusi yang percobaannya tidak independen, dimana percobaan yang satu dengan percobaan lainnya saling terkait, dimana uji coba dilakukan tanpa pengembalian (*without replacement*), yaitu pencuplikan data yang telah diamati tidak dimasukkan kembali dalam populasi semula [1]. Distribusi hipergeometrik sama halnya dengan distribusi binomial, yang terdiri dari dua hasil yaitu sukses dan gagal. Akan tetapi, harus diketahui terlebih dahulu ukuran dari populasi dan proporsi keberhasilan serta kegagalan dalam populasi untuk menerapkan distribusi hipergeometrik.

Dengan demikian, distribusi hipergeometrik memiliki karakteristik sebagai berikut:

* Ditribusi hipergeometrik merupakan distribusi diskrit
* Setiap hasil (outcome) terdiri dari hasil keberhasilan atau kegagalan
* Pengambilan sampel (sampling) dilakukan tanpa pengembalian
* Populasi (N) adalah terbatas dan diketahui
* Jumlah keberhasilan dalam populasi k, diketahui

Sebaran hipergeometrik dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari seperti jumlah barang dagangan yang rusak dalam sampel acak dari sejumlah besar kiriman, jumlah orang-orang yang anda temui dalam hidup dengan nama Ronald, jumlah penny yang terambil dari dalam kendi, ditemukan dalam berbagai bidang dan paling sering digunakan dalam sampel penerimaan barang, pengujian elektronik, jaminan mutu.

Sebaran hipergeometrik dapat ditentukan fungsi karakteristik yang berguna untuk menentukan reperesentasi kanonik dari fungsi tersebut. Fungsi karakteristik merupakan merupakan suatu cara yang sering digunakan untuk menggunakan keterbagian tak hingga suatu sebaran. Keterbagian tak hingga adalah keterbagian suatu peubah acak X menjadi peubah acak yang saling bebas dengan sebaran yang sama. Keterbagian tak hingga dapat dilihat berdasarkan peubah acaknya. Suatu peubah acak X dikatakan terbagi menjadi n jika terdapat peubah-peubah acak yang identik dan saling bebas  sedemikian sehingga . Sedangkan suatu fungsi sebaran *Fx* dikatakan terbagi tak hingga jika untuk setiap bilangan bulat positif n terdapat suatu fungsi sebaran  sedemikian sehingga atau dapat dikatakan bahwa *Fx* adalah konvolusi n kali dari  dengan dirinya sendiri [2].

Fungsi karakteristik dari suatu peubah acak X, dapat dinotasikan dengan dan didefinisikan sebagai berikut



dimana



dan *i* imajiner

dengan menggunakan fungsi karakteristik dari sebaran, suatu fungsi sebaran F dengan dengan fungsi karakteristik  adalah terbagi tak hingga jika untuk setiap bilangan bulat positif n terdapat fungsi karakteristik  sedemikian sehingga  untuk setia t **R** [3].

Distribusi terbagi tak hinggadapat disajikan dalam bentuk representasi kanonik berdasarkan fungsi karakteristik yang diperoleh. Pada tahun 1983 Levy memformulasikan bentuk representasi kanonik fungsi karakteristik dari suatu distribusi terbagi tak hingga. Representasi kanonik tersebut memuat suatu fungsi monoton sehingga setiap fungsi karakteristik dari suatu distribusi menjadi spesifik. Fungsi monoton yang bersesuain dengan distribusi peluangnya tersebut dinamakan ukuran Levy [4].

1. **TINJAUAN LITERASI**
2. **Distribusi Hipergeometrik**

Distribusi peluang peubah acak hypergoemetrik merupakan peluang banyaknya sukses *x* yang terambil dalam sampel acak berukuran *n*, dari total populasi *N* dengan jumlah sukses sebanyak *k* dan jumlah gagal sebanyak *N-k.* Notasi untuk peubah acak *X* yang berdistribusi hypergoemterik dapat diutlis *X~H(x;N,n)*

**Definisi:**  peubah acak X dikatakan berdistribusi hypergoemtrik jika dan hanya jika fungsi kepadatan peluangnya berbentuk:



Dengan , *N* = jumlah populasi

*n* = jumlah sampel

*k* = jumlah sukses

*x* = jumlah suskses terambil

**Teorema: [5]** Misalkan *X* merupakan peubah acak diskrit dengan fungsi kepadatan peluang *f(x)*, maka nilai harapan dari *X* dinyatakan sebagai berikut:



Untuk sebaran hipergeometrik dengan fungsi massa peluang yang telah didefinisikan, dapat ditentukan bentuk dari nilai harapan sebaran tersebut.

Perhatikan bahwa:



Karena

, maka









misalkan:*y = x-1*, maka







Karena , maka



**Teorema:** Varian peubah acak *X* dapat dirumuskan sebagai berikut



Variansi dari sebaran hipergeomterik dapat ditentukan sebagai berikut

Perhatikan bahwa:



Misalkan







Dapat ditentukan nilai dari











Misal *y = x-2*, maka







Karena , maka





Sehingga,





Diperoleh























**Definisi:** misalkan *X* merupakan peubah acak maka fungsi pembangkit momen dari *X* didefinisikan sebgai berikut



Fungsi ini merupakan fungsi pembangkit momen dari peubah acak *X* jika dan hanya jika nilai harapan itu ada untuk setiap t dalam selang *–h < t < h* untuk suatu nilai *h > 0*.

**Definisi**: jika *X* suatu peubah acak diskrit dengan fungsi kepekatan peluang *f(x),* dan fungsi kumulatif *F(x),* maka fungsi karakteristiknya dari peubah acak *X* didefinisikan sebagai berikut:



Dimana dan 

Fungsi karakteristik memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

**Propisisi 1.** .Misalkan (𝑡) adalah fungsi karakteristik dari peubah acak *X*, maka (0) =1

**Proposisi 2.** Fungsi karakteristik ada untuk sebarang sebaran.

**Proposisi 3.** Misalkan X suatu peubah acak, maka fungsi karakteristik dari −𝑋 adalah **Proposisi 4.** Fungsi karakteristik (𝑡) adalah kontinu seragam

**Proposisi 5.** Misalkan X suatu peubah acak, maka fungsi karakteristik dari 𝑎 + 𝑏𝑋 adalah 

**Proposisi 6.** Fungsi karakteristik (𝑡) dari peubah acak *X* bernilai riil jika dan hanya jika peubah acak X mempunyai sebaran yang simetrik terhadap ordinat 𝑥 = 0, yaitu (𝑋 > 𝑥) = (𝑋 < −𝑥) untuk 𝑥 = 0

Karena sebaran hipergeometrik berbentuk kombinasi yang mana dinyatakan dalam bentuk faktorial, maka dapat digunakan factorial turun dan faktorial naik (fungsi Pochhammer). Faktorial naik dapat dinotasikan sebagai *x(n)* [6] dengan bentuk



Dan faktorial turun yaitu:



symbol pochhammer  pada fungsi hypergeomterik, digunakan sebagai faktorial naik. Dimana *x* merupakan bilangan bulat tak negatif, maka  diberikan nilai permutasi n pada anggota *x*. faktorial naik dan factorial turun dapat juga dapat dinyatakan dengan keofisien binomial yaitu

 dan 

Koefisien binomial ini dapat mengarah ke faktorial naik dan faktorial turun, dengan faktorial naik dinyatakan dengan factorial yang dimulai dari ujung lain



Atau sebagai faktorial turun



Symbol pochhammer juga didefinikan fungsi hipergeometrik untuk  adalah sebagai berikut



1. **Sebaran Terbagi Tak Hingga**

Perubah acak *X* dikatakan terbagi tak hingga jika terdapat peubah-peubah acak yang identik dan saling bebas *X1,X2,…,Xn* sedemikian sehingga *X=X1,X2,…,Xn*[3].

**Definisi:** [7] suatu fungsi sebaran *F* dengan fungsi karakteristik  adalah terbagi tak hingga jika untuk setiap bilangan bulat positif n, terdapat suatu fungsi sebaran Fn sedemikian sehingga F adalah konvolusi n kali dari Fn dengan dirinya sendiri yaitu *F = Fn \* … \* Fn* (n kali).

**Definisi**: [7] suatu fungsi sebaran F dengan fungsi karakteristik  adalah terbagi tak hingga jika untuk setiap bilangan bulat positif n, terdapat fungsi karakteristik  sedemikian sehingga  untuk setiap t.

1. **Representasi Kanonik**

Fungsi karakteristik dari sebaran terbagi tak hingga dapat dikarakterisasi kedalam formula umum yang disebut sebagai representasi kanonik fungsi karakteristik terbagi tak hingga. Representasi kanonik dapat dilakukan dengan menentukan ukuran levy dari sebaran yang bersesuain.

**Lema:** [8] misalkan  adalah suatu fungsi karakteristik terbagi tak hingga, maka terdapat suatu barisan dari fungsi  sedemikan sehingga



**Bukti:**

Misalkan adalah suatu fungsi karakteristik terbagi tak hingga.

Akan ditunjukkan bahwa terdapat sedemikian sehingga berlaku



Perhatikan bahwa:



Untuk , maka







Karena



Maka, diperoleh



Asumsikan bahwa adalah fungsi karakteristik terbagi tak hingga, maka  juga merupakan fungsi karakteristik.

Misal dinotasikan fungsi sebaran yang bersesuain dengan fungsi karakteristik adalah , maka











Misal





Maka









Akibatnya, terbukti bahwa terdapat



Sedemikian sehingga berlaku



**Lema:** [12] jika *A(x,t*) didefinisikan untuk  dan dengan



Maka



**Bukti:**

Perhatikan bahwa



Karna fungsi , maka diperoleh



Sehingga diperoleh









Karena dan 2!=2, maka diperoleh



Jadi terbukti bahwa  dan  maka

dengan 

**Teorema: Representasi kanonik Levy [9, 10]** suatu fungsi *f* adalah fungsi karakteristik dari suatu fungsi sebaran terbagi tak hingga jika dan hanya jika terdapat konstanta  dan fungsi *M* yang terdefinisi pada yang tak turun padadan memenuhi dan



Sedemikian sehingga



Representasi kanonik tripel ini tunggal

1. **FUNGSI KARAKTERISTIK DAN REPRESENTASI KANONIK**
2. **Fungsi Karakteristik**

Jika *X* adalah peubah acak dengan sebaran hypergeometrik, dengan fungsi massa peluang sebagai berikut



Maka dapat ditentukan fungsi karakteristrik dari sebaran hipergeometriknya.

























Sebagai fungsi karakteristik dari sebaran hipergeometrik

Akan dibuktikan bahwa  memenuhi sifat-sifat dari fungsi karakteristik:

**Propsisi 1.** Misalkan 

Maka

**Proposisi 2**. Fungsi karakteristik ada untuk sebarang sebaran

Perhatikan bahwa:









**Proposisi 3.** Misalkan *X* suatu peubah acak, maka fungsi karakteristik dari *–X* adalah 

Perhatikan bahwa:

























**Proposisi 4**. Fungsi karakteristik



Adalah kontinu seragam

Penjelasan:

Misal  dan *h = s – t* dimana *s > t* maka akan ditunjukkan untuk setiap > 0 dan > 0 sedemikian sehingga



Untuk 

Perhatikan bahwa:





Untuk h0, maka  dimana .

Hal ini menunjukkan bahwa bergantung terhadap dimana untuk .

**Proposisi 5**. Misalkan *X* suatu peubah acak, maka fungsi karakteristik dari *a + bX* adalah 

Perhatikan bahwa:













**Proposisi 6.** Fungsi karakteristik  dari peubah acak *X* bernilai riil jika dan hanya jika peubah acak *X* mempunyai sebaran yang simetrik terhadap ordinat *x = 0*, yaitu *P( X = x ) = P( X < -x )* untuk *x = 0*.

Perhatikan bahwa:

fungsi sebaran dikatakan simetrik jika fungsi sebaran tersebut sama dengan sekawannya [2], yaitu apabila suatu peubah acak *X* dan *–X* memiliki fungsi karakteristik yang sama. Berdasarkan proposisi 3 yang telah diperoleh, diketahui bahwa  artinya  hanya mempunyai bagian riil.

Perhatikan bahwa:





Artinya tidak hanya mempunyai bilangan riil saja.

1. **Sebaran Terbagi Tak Hingga**

**Teorema:** [11] sebaran hypergoemterik adalah sebaran terbagi tak higga.

**Bukti:**

Misalkan X suatu perubah acak sebaran hipergeometrik dengan fungsi karakteristik dengan fungsi karakteristik .

Akan ditunjukkan bahwa terdapat  sedemikian sehingga berlaku .

Misal n bilangan positif sebarang.

Pilih suatu fungsi

****

Perhatikan bahwa:

****

****

****

Karena , maka dapat disimpulkan bahwa fungsi karakteristik dari sebaran hipergeometrik merupakan fungsi karakteristik terbagi tak hingga.

1. **Representasi Kanonik**

Representasi kanonik dari fungsi karakteristik sebaran terbagi tak hingga adalah



1. **KESIMPULAN**

Sebaran hipergeometrik *X~H(x;N,n)* dengan fungsi kepadatan peluangnya

**** ; *x = 0,1,2,…,n*

Mempunyai fungsi karakteristik sebagai berikut:

****

Fungsi karakteristik terbagi tak hingga dari sebaran hipergeoetrik dapat dikarakterisasi ke dalam sebuah formula yang disebut representasi kanonik fungsi karakteristik sebaran terbagi tak hingga.

Untuk memperoleh representasi kanonik dari sebaran terbagi tak hingga dapat dilakukan dengan cara berikut, yang pertama yaitu dengan memberikan lema yang mendukung, kemudian diberikan teorema representasi kanonik Levy dan menurukannya sehingga diperoleh representasi kanonik sebaran terbagi tak hingga. Pada sebaran hipergeomterik dengan peubah acak X, diperoleh representasi kanonik nya sebagai berikut:



**Daftar Pustaka**

[1] Algifari. 2010. *Analisis Regresi, Teori, Kasus dan Solusi, Edisi Kedua*. Yogyakarta: BPFE UGM

[2] Petrov, V. V. 1995. *Limit Theorem Of Probability Theory*. New York: Oxford University Press

[3] Laha, R, G. dan V. K. Rohagi. 1979. *Probability Theory*. New York: John Wiley Sons.

[4] Sato, K. 1999. *Levy Process and Infinitely Divisible Distributions*. New York: Cambridge Univ Press

[5] Bain, L., J., dan Engelhardt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statictic. Second Edition.* California: Duxbury Press

[6] Alcaras dan vanagas, V. *New Algebraic Tables of Su(2) For Recalculated Wigner J, 6j, and Gaunt Coefficients*, Siam. J.Sci. Comput., 25, 1416. 2003

[7] Kahar, ER. 2014. *Representasi Kanonik untuk Fungsi Karakteristik dari Sebaran Terbagi Tak Hingga*. Padang: UNAND

[8] Lukacs, E. 1970. *Characteristic Function, Second Edition*. London: Griffin

[9] Devianto, D. 2017. *The Characteristic Function Property of Convoluted Random Variable from A Variational Cauchy Distribution*. Proceedings 2nd ISI Regional Statistics Conference 20-24 March 2017, Indonesia (Session CPS05), pp.180-185.

[10] Devianto, D., Yozza, H. dan Yanuar, F. 2019. *The Infinitely Divisible Characteristic Function of Compound Poisson Distribution as The Sum of Variational Cauchy Distribution*. Journal of Physics: Conference Series. 1397: 012065

[11] Putri, D., M. 2018. *Penentuan Kelas Keterbagian Tak Hingga Sebaran Binomial Negatif*. Padang:UNAND

[12] Tucker, H. G. 1967. *Probability and Mathematical Statistics*. Academic Press: New York